Université Paris Dauphine
2022-2023

# Introduction aux séries temporelles

Examen du 09/01/2023

Durée 2 heures - Documents et calculatrices non autorisés

**Exercice 1 (Sur 8 points)** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{Z}$, on pose $\sigma^2_{n,t} = \mathrm{Var}(X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}))$ où $H_{t-1,n} = \mathrm{Vect}(X_{t-k},\ k \in \{1, \ldots, n\})$ et proj désigne la projection orthogonale dans $L^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il existe des réels $(\alpha_{n,k})_{k=1,\ldots,n}$, *que l'on peut choisir indépendants de $t$,* tels que $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}X_{t-k}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire que $\sigma^2_n$ ne dépend pas de $t$.
3. Montrer que la suite $(\sigma^2_n)$ possède une limite, notée $\sigma^2_\infty$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

   On dit que $X$ est déterministe si

   $$X_t \in \overline{Vect\{X_s,\ s \leq t-1\}} \qquad \forall t \in \mathbb{Z},$$

   où l'adhérence est prise au sens $L^2$.
4. Montrer que $X$ est déterministe, si et seulement si, $\sigma_\infty = 0$.
5. Dans cette question on suppose que $X$ est un processus harmonique : il existe deux variables aléatoires $A$ et $B$, indépendantes, de carré intégrables, centrées et de variance 1, et un réel $\theta \in ]0, \pi[$ tels que $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Montrer que $X$ est déterministe.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $s, t \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n})$ appartient à $H_{t-1,n}$, il existe réels $(\alpha_{n,k})_{k=1,\ldots,n}$ tels que $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}X_{t-k}$. Vérifions que $\mathrm{proj}(X_s, H_{s-1,n}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}X_{s-k}$, ce qui montrera que les coefficients ne dépendent pas de $t$. En effet, la variable aléatoire $Y := \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}X_{s-k}$ appartient à $H_{s-1,n}$. De plus, pour tout $l \in \{1, \ldots, n\}$, (les v.a. $X_t$ étant centrées)

   $$\begin{aligned}\langle X_s - Y, X_{s-l}\rangle &= \mathbb{E}\left[(X_s - Y)X_l\right] = \mathbb{E}\left[X_sX_{s-l}\right] - \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}\mathbb{E}\left[X_{s-k}X_{s-l}\right] \\ &= \gamma_X(l) - \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}\gamma_X(l-k) = \mathbb{E}\left[X_tX_{t-l}\right] - \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}\mathbb{E}\left[X_{t-k}X_{t-l}\right] \\ &= \langle X_s - \mathrm{proj}(X_t, H_{t,-1,n}), X_{s-l}\rangle = 0.\end{aligned}$$

   Cela montre que $X_s - Y$ est orthogonal à tous les $X_{s-l}$, avec $l \in \{1, \ldots, n\}$ et donc à $H_{s-1,n}$. Par caractérisation de la projection orthogonale, on en déduit que $Y = \mathrm{proj}(X_s, H_{s-1,n})$.

2. Fixons $t \in \mathbb{Z}$. On remarque avec les notations de la question précédente (et comme les v.a. sont centrées) que

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n})) = \|X_t - \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} X_{t-k}\|^2 = \|\sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} X_{t-k}\|^2,$$

en posant $\alpha_{n,0} = -1$. Donc

$$\mathrm{Var}(X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n})) = \sum_{i,k=0}^n \alpha_{n,k}\alpha_{n,i}\mathbb{E}\left[X_{t-k}X_{t-i}\right] = \sum_{i,k=0}^n \alpha_{n,k}\alpha_{n,i}\gamma_X(i-k).$$

Cela montre que $\sigma_n^2$ ne dépend pas de $t$.

3. Par définition de la projection orthogonale, $\mathrm{Var}(X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}))$ n'est rien d'autre que de carré de la distance $d(X_t, H_{t-1,n})$ de $X_t$ à $H_{t-1,n}$. Comme $H_{t-1,n} \subset H_{t-1,n+1}$, on en déduit que
$$\sigma_n^2 = d^2(X_t, H_{t-1,n}) \geq d^2(X_t, H_{t-1,n+1}) = \sigma_{n+1}^2.$$
La suite $(\sigma_n^2)$ est donc décroissante, minorée (car positive) : elle possède une limite, notée $\sigma_\infty^2$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

4. On suppose que $X$ est déterministe. Soit $t \in \mathbb{Z}$. Il existe une suite $(Y_m)$ dans $Vect\{X_{t-k},\ k \geq 1\}$ qui tend vers $X$ dans $L^2$ lorsque $m \to +\infty$. Par définition de $Vect\{X_{t-k},\ k \geq 1\}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que $Y_m \in H_{t-1,n}$. Donc

$$\sigma_\infty^2 \leq \sigma_n^2 \leq d^2(X_t, H_{t-1,n}) \leq \|Y_m - X_t\|^2.$$

On fait tendre $m \to +\infty$ pour obtenir,

$$\sigma_\infty^2 \leq \lim_{m \to +\infty} \|Y_m - X_t\|^2 = 0,$$

soit $\sigma_\infty = 0$.

Inversement, supposons que $\sigma_\infty = 0$. Soit $t \in \mathbb{Z}$. Comme

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n}))$$

tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, où $Y_n := \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,n})$ appartient à $Vect\{X_{t-k},\ k \geq 1\}$, on en déduit qu'il existe une suite $(Y_n)$ de $Vect\{X_{t-k},\ k \geq 1\}$ qui tend vers $X_t$. Donc $X_t \in \overline{Vect\{X_s,\ s \leq t\}}$ et $X$ est déterministe.

5. Vérifions d'abord que $A$ et $B$ appartiennent à $H_{t-1,2}$. En effet, comme

$$\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \qquad \text{où } M := \begin{pmatrix} \cos(\theta(t-1)) & \sin(\theta(t-1)) \\ \cos(\theta(t-2)) & \sin(\theta(t-2)) \end{pmatrix}$$

avec $det(M) = \cos(\theta(t-1))\sin(\theta(t-2)) - \sin(\theta(t-1))\cos(\theta(t-2)) = \sin(\theta) \neq 0$, on en déduit que $A$ et $B$ sont combinaison linéaire de $X_{t-1}$ et $X_{t-2}$ et donc que $A$ et $B$ appartiennent à $H_{t-1,2}$. Donc $X_t$, qui est combinaison linéaire de $A$ et $B$, appartient aussi à $H_{t-1,2}$, et par conséquent à $\overline{Vect\{X_s,\ s \leq t\}}$. Cela montre que $X$ est déterministe.

**Exercice 2 (Sur 12 points)** Dans tout l'exercice, $Z$ est un bruit blanc centré et de variance 1.

1. (Analyse d'un processus ARMA bien posé) On considère l'équation

$$Y_t = \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   (a) Montrer que cette équation possède une unique solution stationnaire et que cette solution est causale.

   (b) Déterminer explicitement $Y_t$ en fonction de $(Z_{t-k})_{k\in\mathbb{N}}$.

2. On considère maintenant l'équation

$$X_t = -\frac{1}{6}(X_{t-1} - 4X_{t-2} + X_{t-3}) + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

   On veut montrer que cette équation ne possède pas de solution stationnaire. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que cette équation possède une solution stationnaire $X$. Soit $\nu_X$ sa mesure spectrale.

   (a) Posons $\Phi(z) = 1 + \frac{1}{6}(z - 4z^2 + z^3)$. Montrer que, pour toute fonction continue et $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(u)\left|\Phi(e^{iu})\right|^2 \nu_X(du) = \int_0^{2\pi} f(u)\frac{1}{2\pi}du.$$

   (b) (question plus délicate) Pour $\delta > 1$, on pose $f_\delta(u) = 1/(\delta + \cos(u))$. Montrer que la fonction $u \to f_\delta(u)\left|\Phi(e^{iu})\right|^2$ est bornée sur $\mathbb{R}$ indépendamment de $\delta > 1$ et en déduire une contradiction.

3. Soit $X$ le processus défini par récurrence par $X_{-1} = X_{-2} = X_{-3} = 0$ et

$$X_t = -\frac{1}{6}(X_{t-1} - 4X_{t-2} + X_{t-3}) + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

   (a) Vérifier que $\tilde{Y}_t$ défini par $\tilde{Y}_t := X_t + X_{t-1}$ pour tout $t \geq 0$ satisfait

$$\tilde{Y}_t = \frac{5}{6}\tilde{Y}_{t-1} - \frac{1}{6}\tilde{Y}_{t-2} + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{N},$$

   avec $\tilde{Y}_{-1} = \tilde{Y}_{-2} = 0$ et que

$$X_t = \sum_{k=0}^{t}(-1)^{t-k}\tilde{Y}_k \qquad \forall t \in \mathbb{N}.$$

   (b) (question plus délicate) Soit $(Y_t)$ le processus stationnaire défini à la question 1. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y_t - \tilde{Y}_t\|_2 = 0.$$

   (Indication : on pourra poser $W_t = Y_t - \tilde{Y}_t$ et trouver une relation matricielle entre $(W_t, W_{t-1})$ et $(W_{t-1}, W_{t-2})$.)

Solution :

1. (a) D'après le cours, l'équation

$$Y_t = \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + Z_t, \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

possède une unique solution stationnaire, dès que le polynôme $\Phi(X) = 1 - \frac{5}{6}X + \frac{1}{6}X^2$ ne possède pas de racine de module 1. De plus cette solution est causale dès que les racines de $\Phi$ sont en dehors du disque unité. Ici, on note que les racines sont 2 et 3, qui sont bien en dehors du disque unité. Donc l'équation possède une unique solution stationnaire et cette solution est causale.

(b) On sait que la solution $Y$ est donnée par $Y = F_\alpha Z$, où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = \frac{1}{\Phi(z)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Phi(z)} &= \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z - \frac{1}{6}z^2} = \frac{1}{(1-(z/2))(1-(z/3))} \\ &= \frac{3}{1-(z/2))} - \frac{2}{1-(z/3))} = 3\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}z^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(3(2^{-k}) - 2(3^{-k}))z^k.\end{aligned}$$

D'où $\alpha_k = (3(2^{-k}) - 2(3^{-k}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$). On en déduit que

$$Y_t = \sum_{k=0}^{\infty}(3(2^{-k}) - 2(3^{-k}))Z_{t-k} \qquad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

2. (a) Définissons l'élément $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1/6$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = -1/6$ et $\beta_k = 0$ sinon. Alors $\Phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ et donc $F_\beta X = Z$. Un théorème de cours sur les mesures spectrales affirme alors que $\mu_X$ et $\mu_Z$ sont liées par la relation :

$$|\Phi(e^{iu})|^2 \mu_X(du) = \mu_Z(du).$$

Donc, pour toute fonction continue et $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f(u)|\Phi(e^{iu})|^2 \mu_X(du) = \int_0^{2\pi} f(u)\mu_Z(du).$$

Or un autre théorème de cours affirme que, comme $Z \in BB(0,1)$, $\mu_Z$ a une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) qui est constante et donnée par $\mu_Z(du) = 1/(2\pi)du$. D'où, pour toute fonction continue et $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int_0^{2\pi} f(u)\left|\Phi(e^{iu})\right|^2 \nu_X(du) = \int_0^{2\pi} f(u)\frac{1}{2\pi}du.$$

(b) On note que $\Phi(z) = -(1+z)(1-\frac{5}{6}z+\frac{1}{6}z^2)$, et donc que

$$f_\delta(u)|\Phi(e^{iu})|^2 = f_\delta(u)|1+e^{iu}|^2|1-\frac{5}{6}e^{iu}+\frac{1}{6}e^{2iu}|^2 = \frac{(1+\cos(u))^2+(\sin(u))^2}{\delta+\cos(u)}g(u),$$

où $g(u) = |1-\frac{5}{6}e^{iu}+\frac{1}{6}e^{2iu}|^2$ est une fonction continue, $2\pi-$périodique et donc borné (indépendamment de $\delta$). On a

$$0 \leq \frac{(1+\cos(u))^2+(\sin(u))^2}{\delta+\cos(u)} \leq 1+\cos(u)+(1-\cos(u))\frac{1+\cos(u)}{\delta+\cos(u)} \leq 2.$$

puisque $\delta+\cos(u) \geq 1+\cos(u) \geq 0$. On en déduit que la fonction $u \to f_\delta(u)\left|\Phi(e^{iu})\right|^2$ est bornée sur $[-1,1]$ uniformément en $\delta > 1$. Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi(\delta+\cos(u))}du = \int_0^{2\pi} f_\delta(u)|\Phi(e^{iu})|^2\mu_X(du)$$

est borné indépendamment de $\delta > 1$, ce qui est impossible puisque, par convergence monotone et lorsque $\delta \to 1^+$, cela impliquerait que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi(1+\cos(u))}du$$

converge.

3. (a) On note d'abord que $\tilde{Y}_{-1} = X_{-1}+X_{-2} = 0$ et $\tilde{Y}_{-2} = X_{-2}+X_{-3} = 0$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &= X_t + X_{t-1} = -\frac{1}{6}(X_{t-1}-4X_{t-2}+X_{t-3})+Z_t+X_{t-1}\\ &= \frac{5}{6}X_{t-1}+\frac{2}{3}X_{t-2}-\frac{1}{6}X_{t-3}+Z_t = \frac{5}{6}(X_{t-1}+X_{t-2})-\frac{1}{6}(X_{t-3}+X_{t-2})+Z_t\\ &= \frac{5}{6}\tilde{Y}_{t-1}-\frac{1}{6}\tilde{Y}_{t-2}+Z_t.\end{aligned}$$

L'égalité

$$X_t = \sum_{k=0}^{t}(-1)^{t-k}\tilde{Y}_k \qquad \forall t \in \mathbb{N}$$

se vérifie facilement par récurrence : l'égalité est vraie pour $t=-1$. Supposons-la vraie pour un certain $t \geq -1$. Alors, par hypothèse de récurrence,

$$X_{t+1} = \tilde{Y}_{t+1} - X_t = \tilde{Y}_{t+1} - \sum_{k=0}^{t}(-1)^{t-k}\tilde{Y}_k = \sum_{k=0}^{t+1}(-1)^{t+1-k}\tilde{Y}_k.$$

On conclut par récurrence.

(b) Posons $W_t = Y_t - \tilde{Y}_t$. Notons que, pour tout $t \geq 0$, on a

$$W_t = (\frac{5}{6}Y_{t-1}-\frac{1}{6}Y_{t-2}+Z_t-)-(\frac{5}{6}\tilde{Y}_{t-1}-\frac{1}{6}\tilde{Y}_{t-2}+Z_t) = \frac{5}{6}W_{t-1}-\frac{1}{6}W_{t-2}.$$

Donc, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{pmatrix} W_t \\ W_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}W_{t-1} - \frac{1}{6}W_{t-2} \\ W_{t-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} W_{t-1} \\ W_{t-2} \end{pmatrix} \text{ où } A := \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} W_t \\ W_{t-1} \end{pmatrix} = A^{t+1} \begin{pmatrix} Y_{-1} \\ Y_{-2} \end{pmatrix}.$$

puisque $\tilde{Y}_{-1} = \tilde{Y}_{-2} = 0$. Or les valeurs propres de la matrice $A$ vérifient $\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0$, et sont donc $1/2$ et $1/3$. La matrice $A$ est donc diagonalisable et il existe une matrice $P$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

ce qui implique que

$$A^{t+1} = P \begin{pmatrix} 1/2^{t+1} & 0 \\ 0 & 1/3^{t+1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En travaillant en norme matricielle, on en déduit que, p.s.,

$$\| \begin{pmatrix} W_t \\ W_{t-1} \end{pmatrix} \| \leq 2^{-(t+1)} \|P\| \|P^{-1}\| \| \begin{pmatrix} W_{-1} \\ W_{-2} \end{pmatrix} \|.$$

(la norme $\| \cdot \|$ est ici la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$). En prenant la norme dans $L^2$, on en déduit finalement que

$$\|W_t\|_2 \leq \| \| \begin{pmatrix} W_t \\ W_{t-1} \end{pmatrix} \| \|_2 \leq 2^{-(t+1)} \|P\| \|P^{-1}\| \max\{\|W_{-1}\|_2, \|W_{-2}\|_2\}.$$

Cela prouve que

$$\lim_{t \to +\infty} \|Y_t - \tilde{Y}_t\|_2 = \lim_{t \to +\infty} \|W_t\|_2 = 0.$$